

۱- گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا نقطه را جایگذاری می کنیم.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^8} \times \dots \times \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \longrightarrow A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

۲- گزینه ۳ درست است.

برای ساده تر شدن عبارت تحت انتگرال، آن را در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم، سپس از قضیه کران متقارن استفاده می کنیم.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{(1+x^5) - \sqrt{1+x^{10}}}{\underbrace{(1+x^5)^2 - (1+x^{10})}_{2x^5}} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2x^5} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+x^{10}}}{2x^5} \right) dx$$

$$I = 0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx + 0 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

۳- گزینه ۴ صحیح است.

در ۲ گزینه اول مشخص است شرط لازم همگرایی سری $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0)$ وجود ندارد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = 1^\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left(\frac{n-1}{n} - 1 \right)} \sim e^{-1} \neq 0$$

(بررسی گزینه اول)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = 1^\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right)} \sim e \neq 0$$

(بررسی گزینه دوم)

برای اثبات وضعیت دو گزینه آخر از آزمون کوشی ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$) استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\left(\frac{n+1}{n}-1\right)} = e > 1$$

(بررسی گزینه سوم)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\left(\frac{n-1}{n}-1\right)} = e^{-1} < 1$$

(بررسی گزینه چهارم)

۴- گزینه ۲ صحیح است.

$$|a+b| = \sqrt{2}$$

$$|2a+3b| = 3\sqrt{2}$$

$$|3a+2b| = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |a+b|^2 = 2 \xrightarrow{A.A=|A|^2} (a+b).(a+b) = 2 \rightarrow |a|^2 + 2ab + |b|^2 = 2 \\ |2a+3b|^2 = 18 \rightarrow (2a+3b).(2a+3b) = 4|a|^2 + 12ab + 9|b|^2 = 18 \\ |3a+2b|^2 = 32 \rightarrow (3a+2b).(3a+2b) = 9|a|^2 + 12ab + 4|b|^2 = 32 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4x+12y+9z=18 \\ 9x+12y+4z=32 \end{cases} \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & 9 \\ 9 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 18 & 12 & 9 \\ 32 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 2(-5 \times 12) - 2(-9 \times 24) + (-14 \times 12) = 144 \rightarrow |a|^2 = x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{5}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 18 & 9 \\ 9 & 32 & 4 \end{vmatrix} = -9 \times 24 - 2(-65) + (128 - 162) = -120 \rightarrow ab = y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -12$$

$$\frac{72}{5} - 24 + z = 2 \Rightarrow |b|^2 = z = \frac{58}{5}$$

$$d^2 = |a-b|^2 = (a-b)(a-b) = |a|^2 - 2ab + |b|^2 = \frac{72}{5} + 24 + \frac{58}{5} = 50$$

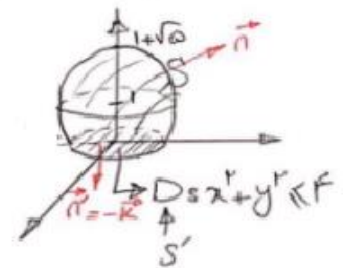
$$\longrightarrow d = |a-b| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

۵- گزینه ۲ صحیح است.

باتوجه به اینکه ناحیه مورد نظر را می توان با سطح افقی (ساده) $z = 0$ ببندیم، می توان با کمک قضیه دیورژانس و سپس محاسبه شار روی صفحه ساده $z = 0$ ، شار روی سطح مورد نظر را بدست آورد.

$$I_S = I_{S+S'} - I_{S'} = 0 - (-4\pi) = 4\pi$$

$$I_{S+S'} = \iiint_S F \cdot n \, ds = \iiint_V (-3x^2 \sin x^3 + 4y^3 + x) \, dv$$



که چون این ناحیه در راستای x و y مقارن و عبارت تحت انتگرال فوق فرد است، حاصل انتگرال صفر می شود.

$$I_{S': x^2 + y^2 \leq 4} = \iint_{S'} F \cdot n \, ds = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (0, 0, 1 + xz) \cdot (0, 0, -1) \, dA$$

$$\Rightarrow I_{S'} = - \iint_{S'} (1 + xz) \, dA = -S_D = -4\pi$$

$$C(t) = (x = t, y = 4t^2) \xrightarrow[x=t]{0 \leq x \leq 1} 0 \leq t \leq 1$$

$$W = \int_C F \cdot dr = \int F(C(t)) \cdot \vec{C}(t) \, dt = \int_0^1 (4t^4, 16t^3) \cdot (1, 8t) \, dt$$

$$= \int_0^1 (4t^4 + 128t^3) \, dt = 104 \left(\frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{104}{5}$$